

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор института нано-, био-,
информационных, когнитивных
и социогуманитарных наук и
технологий**

П.А. Форш

Рабочая программа дисциплины (модуля)

по дисциплине:	Линейная алгебра
по направлению:	Прикладные математика и физика
профиль подготовки:	Физика атомных ядер и элементарных частиц, физика высоких энергий Физтех-школа природоподобных, плазменных и ядерных технологий им. И.В. Курчатова Кафедра математики и математических методов физики
курс:	1
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 1 (осенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 45 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Количество контрольных работ, заданий: 2

Программу составил: И.А. Шейпак, д-р физ.-мат. наук, доцент, доцент

Программа обсуждена на заседании Кафедры математики и математических методов физики 17.03.2020

Аннотация

Целью дисциплины является формирование у студентов научного математического мышления, умения применять математический аппарат для исследований экономических процессов.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

- освоение студентами фундаментальных знаний в области линейной алгебры и аналитической геометрии, изучение способов решения задач методами линейной алгебры и аналитической геометрии.

Задачи дисциплины

- формирование базовых знаний в области линейной алгебры и аналитической геометрии как дисциплины, интегрирующей общематематическую подготовку прикладных математиков и физиков и обеспечивающей технологические основы современных инновационных сфер деятельности;
- обучение студентов принципам применения основных понятий линейной алгебры.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
ОПК-5 Способен участвовать в проведении фундаментальных и прикладных исследований и разработок, самостоятельно осваивать новые теоретические, в том числе, математические методы исследований, и работать на современной экспериментальной научно-исследовательской, измерительно-аналитической и технологической аппаратуре	ОПК-5.2 Обладает способностью к освоению новых знаний на основе изучения литературы, научных статей и других источников
ПК-4 Способен критически оценивать применимость используемых методик и методов	ПК-4.1 Знает численные порядки величин, характерных для соответствующей профессиональной области

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- основы теории линейных пространств, определения и свойства подпространств, их базисов, суммы и пересечения, метод Гаусса решения систем линейных уравнений, свойства сложения и умножения матриц, определение и свойства ранга и определителя матрицы, свойства комплексных чисел;
- определение линейного отображения, свойства его ядра и образа, определение и свойства собственных значений, собственных и корневых векторов, теорему о жордановой форме оператора, определение и свойства билинейных и квадратичных форм;
- теорему о каноническом виде квадратичной формы, закон инерции, определение знакоопределенной и знакопеременной формы, критерий Сильвестра;
- определение евклидова пространства, основы многомерной евклидовой геометрии, свойства самосопряженных, унитарных и ортогональных операторов, свойства билинейных и квадратичных форм в евклидовых пространствах.

уметь:

- решать системы линейных уравнений, находить базисы и размерности подпространств, их сумм и пересечений, выписывать матрицу линейного оператора, находить собственные значения и собственные векторы;
- приводить матрицу оператора к жордановой форме, находить канонический вид квадратичной формы, исследовать форму на - знакоопределенность;
- определять канонический вид ортогонального, унитарного и самосопряженного оператора, приводить квадратичную форму к главным осям ортогональным преобразованием.

владеть:

- аппаратом матриц и линейных уравнений и его приложениями;
- методами теории линейных операторов и квадратичных форм.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Аналитическая геометрия и векторная алгебра.	2	2		7
2	Билинейные и полуторалинейные формы.	4	4		
3	Билинейные и полуторалинейные формы в евклидовых пространствах.	4	2		
4	Евклидовы и унитарные пространства.	2	2		7
5	Кривые второго порядка на плоскости.	2	4		
6	Линейные отображения линейных пространств.	2	2		5
7	Линейные пространства.	2	2		
8	Матрицы и системы линейных уравнений.	4	4		9
9	Операторы в евклидовых и унитарных пространствах.	4	4		7
10	Поверхности второго порядка в пространстве.	4	4		10
Итого часов		30	30		45
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		135 час., 3 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 1 (Осенний)

1. Аналитическая геометрия и векторная алгебра.

Основные понятия линейной алгебры и аналитической геометрии. Система координат, координатное пространство.

2. Билинейные и полуторалинейные формы.

Билинейные и квадратичные формы. Симметричные, кососимметричные и эрмитовы формы. Ортогональность в смысле форм. Ядро и невырожденность (косо)симметричной формы. Разложение пространства в прямую сумму подпространств, ортогональных в смысле форм. Метод Лагранжа приведения к сумме квадратов. Теорема Якоби. Положительно и отрицательно определенные формы. Критерий Сильвестра.

3. Билинейные и полуторалинейные формы в евклидовых пространствах.

Билинейные и квадратичные формы в евклидовых пространствах. Приведение к каноническому и нормальному видам пары форм, одна из которых знакоопределённая. Главные оси и собственные числа.

4. Евклидовы и унитарные пространства.

Евклидовы пространства. Определение и примеры. Неравенства Коши--Буняковского и треугольника. Ортонормированные базисы. Ортогонализация Грама--Шмидта. Подпространства и ортогональные дополнения. Изоморфизм евклидовых пространств. Матрица Грама. Объём n -мерного параллелепипеда. Унитарные пространства. Билинейные, полуторалинейные и эрмитовы формы. Эрмитово скалярное произведение. Подпространства и ортогональные дополнения.

5. Кривые второго порядка на плоскости.

Квадратичная форма кривой второго порядка. Приведение формы к каноническому виду. Классификация кривых второго порядка. Эллиптический, гиперболический и параболический случаи.

6. Линейные отображения линейных пространств.

Линейные операторы, определение и свойства. Ядро и образ. Ядро и образ оператора. Матрица оператора, ее изменение при замене базисов. Изоморфизм линейных пространств. Линейные операции над отображениями, композиция (произведение) операторов. Линейные операторы, действующие в одном пространстве.

Характеристический многочлен. Характеристическое уравнение, собственные числа и собственные векторы. Условия приведения матрицы оператора к диагональному виду. Аннулирующие многочлены. Теорема Гамильтона--Кэли.

7. Линейные пространства.

Линейные подпространства, примеры и свойства. Пересечение и сумма подпространств, их свойства. Прямая сумма подпространств. Теорема о размерности суммы двух подпространств.

8. Матрицы и системы линейных уравнений.

Матрицы и векторы. Сложение и умножение на число, свойства линейных операций. Линейная зависимость матриц. Умножение матриц, его свойства. Матричная запись системы линейных уравнений.

9. Операторы в евклидовых и унитарных пространствах.

Сопряженный оператор и его свойства. Самосопряжённые операторы. Собственные значения и собственные векторы самосопряжённых операторов.

Приведение матрицы самосопряжённого оператора к диагональному виду.

Ортогональные и унитарные преобразования. Собственные значения и собственные векторы ортогональных и унитарных преобразований.

Канонический вид матриц ортогональных и унитарных преобразований.

10. Поверхности второго порядка в пространстве.

Квадратичная форма поверхности второго порядка. Приведение формы к каноническому виду.
Классификация поверхностей второго порядка.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория с доской и маркерами.

6. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры [Текст] : учебник для вузов / Д. В. Беклемишев .— 12-е изд., испр. — М. : Физматлит, 2008, 2009 .— 312 с.
 2. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре [Текст] : учеб. пособие для вузов / Л. А. Беклемишева, А. Ю. Петрович, И. А. Чубаров ; под ред. Д. В. Беклемишева .— 2-е изд., перераб. — М. : Физматлит : Лаб. базовых знаний, 2003, 2004, 2006, 2012, 2014 .— 496 с.
- Фонд литературы кафедры

Дополнительная литература

1. Дополнительные главы линейной алгебры [Текст] : учеб. пособие для вузов / Д. В. Беклемишев .— 2-е изд., перераб. и доп. — СПб. : Лань, 2008 .— 496 с.
2. Аналитическая геометрия [Текст] : учебник для вузов : рек. М-вом образования РФ / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк .— М : Физматлит, 2003 .— 240 с.
3. Линейная алгебра [Текст] : учебник для вузов / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк .— 6-е изд., стереотип. — М. : Физматлит, 2006 .— 280 с.
4. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры [Текст] : учебник для вузов / П. С. Александров .— М. : Наука, 1979 .— 512 с.

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

Не используются

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

В процессе самостоятельной работы обучающиеся могут использовать программные средства MATLAB, Mathcad, WolframMathematica.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Для успешного освоения курса, помимо посещения лекций и семинаров, от студентов требуется самостоятельная работа в объеме не менее чем те часы, которые указаны для каждого раздела программы. В основном, это время отводится на самостоятельное решение задач, входящих в два задания. Самостоятельные занятия включают в себя также повторение материала лекций, семинарских занятий и подготовку к промежуточным тестированиям, которые проводятся для текущего контроля за усвоением материала. Всего предполагается провести за семестр 4 теста, выполнить итоговую контрольную работу по решению задач в конце семестра и защитить каждое из двух самостоятельно выполненных заданий. Студенты, успешно прошедшие все формы промежуточного контроля, допускаются к сдаче экзамена по дисциплине.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению:	Прикладные математика и физика
профиль подготовки:	Физика атомных ядер и элементарных частиц, физика высоких энергий Физтех-школа природоподобных, плазменных и ядерных технологий им. И.В. Курчатова кафедра математики и математических методов физики
курс:	<u>1</u>
квалификация:	бакалавр
Семестр, формы промежуточной аттестации: 1 (осенний) - Экзамен	
Разработчик:	И.А. Шейпак, д-р физ.-мат. наук, доцент, доцент

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
ОПК-5 Способен участвовать в проведении фундаментальных и прикладных исследований и разработок, самостоятельно осваивать новые теоретические, в том числе, математические методы исследований, и работать на современной экспериментальной научно-исследовательской, измерительно-аналитической и технологической аппаратуре	ОПК-5.2 Обладает способностью к освоению новых знаний на основе изучения литературы, научных статей и других источников
ПК-4 Способен критически оценивать применимость используемых методик и методов	ПК-4.1 Знает численные порядки величин, характерных для соответствующей профессиональной области

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Линейная алгебра» обучающийся должен:

знать:

- основы теории линейных пространств, определения и свойства подпространств, их базисов, суммы и пересечения, метод Гаусса решения систем линейных уравнений, свойства сложения и умножения матриц, определение и свойства ранга и определителя матрицы, свойства комплексных чисел;
- определение линейного отображения, свойства его ядра и образа, определение и свойства собственных значений, собственных и корневых векторов, теорему о жордановой форме оператора, определение и свойства билинейных и квадратичных форм;
- теорему о каноническом виде квадратичной формы, закон инерции, определение знакоопределенной и знакопеременной формы, критерий Сильвестра;
- определение евклидова пространства, основы многомерной евклидовой геометрии, свойства самосопряженных, унитарных и ортогональных операторов, свойства билинейных и квадратичных форм в евклидовых пространствах.

уметь:

- решать системы линейных уравнений, находить базисы и размерности подпространств, их сумм и пересечений, выписывать матрицу линейного оператора, находить собственные значения и собственные векторы;
- приводить матрицу оператора к жордановой форме, находить канонический вид квадратичной формы, исследовать форму на - знакоопределенность;
- определять канонический вид ортогонального, унитарного и самосопряженного оператора, приводить квадратичную форму к главным осям ортогональным преобразованием.

владеть:

- аппаратом матриц и линейных уравнений и его приложениями;
- методами теории линейных операторов и квадратичных форм.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

В целях текущего контроля успеваемости предусмотрен краткий опрос по темам предыдущих занятий по теме прошлой лекции или в конце занятия по пройденной теме.

3. Перечень типовых контрольных заданий, используемых для оценки знаний, умений, навыков

Промежуточная аттестация по дисциплине «Линейная алгебра» осуществляется в форме экзамена. Экзамен проводится в устной форме.

Перечень контрольных вопросов для сдачи экзамена в 1 семестре:

1. Линейные функции и системы линейных уравнений. Эквивалентность систем. Метод Гаусса. Совместные и несовместные системы, однозначная разрешимость систем.
2. Линейные пространства. Линейная зависимость и независимость векторов. Размерность и базис. Координаты вектора в базисе.
3. Подпространства. Сумма и пересечение подпространств. Прямая сумма. Изоморфизм линейных пространств.
4. Линейные отображения. Ядро и образ отображения.
5. Матрицы. Сложение и умножение матриц. Матрица линейного отображения. Матрица композиции отображений.
6. Ранги матрицы по строкам и столбцам. Теорема о совпадении рангов. Условие совместности и размерность пространства решений системы линейных уравнений в терминах ранга ее матрицы.
7. Определитель матрицы. Полилинейность и косая симметрия определителя. Единственность полилинейной кососимметричной функции строк.
8. Свойства определителя.
9. Обратная матрица.
10. Квадратные системы линейных уравнений. Формулы Крамера.
11. Матрица перехода от одного базиса линейного пространства к другому. Закон преобразования координат вектора при замене базиса.
12. Линейные операторы. Матрица оператора в базисе. Закон преобразования матрицы оператора при замене базиса.
13. Инвариантные подпространства оператора. Собственные значения и собственные векторы. Характеристический многочлен. Определитель и след линейного оператора.
14. Комплексные числа. Алгебраическая и тригонометрическая формы записи комплексных чисел. Формула Муавра. Корни из комплексных чисел.
15. Многочлены с комплексными коэффициентами. Основная теорема алгебры.
16. Теорема Безу. Разложение на множители многочленов с комплексными и действительными коэффициентами.
17. Комплексные линейные пространства. Комплексификация и овеществление.
18. Структура инвариантного подпространства линейного оператора в комплексном пространстве. Собственные и присоединенные векторы. Жорданов базис и жорданова нормальная форма.
19. Билинейные формы. Матрица билинейной формы. Закон преобразования матрицы при замене базиса.
20. Симметричные билинейные и квадратичные формы. Ортогональные дополнения. Приведение к каноническому виду. Закон инерции.
21. Знакоопределенные и знакопеременные формы. Критерий Сильвестра.
22. Полуторалинейные и эрмитовы формы в комплексном пространстве.
23. Евклидовы пространства. Длины и углы. Неравенства Коши – Буняковского и треугольника. Ортонормированные базисы. Подпространства и ортогональные дополнения. Изоморфизм евклидовых пространств.
24. Операторы в евклидовых пространствах. Сопряженный оператор. Матрица сопряженного оператора.
25. Самосопряженные операторы и их свойства. Канонический вид.

26. Унитарные и ортогональные операторы и их свойства. Канонический вид унитарного и ортогонального оператора.
27. Полярное разложение невырожденного оператора.
28. Билинейные и квадратичные формы в евклидовых пространствах. Главные оси и собственные значения квадратичной формы. Приведение квадратичной формы к каноническому виду ортогональным преобразованием.
29. Классификация кривых второго порядка на плоскости.

Примеры экзаменационных билетов:

Билет 1

1. Линейные функции и системы линейных уравнений. Эквивалентность систем. Метод Гаусса. Совместные и несовместные системы, однозначная разрешимость систем.
2. Симметричные билинейные и квадратичные формы. Ортогональные дополнения. Приведение к каноническому виду. Закон инерции.

Билет 2

1. Линейные отображения. Ядро и образ отображения.
2. Полуторалинейные и эрмитовы формы в комплексном пространстве.

Билет 3

1. Матрица перехода от одного базиса линейного пространства к другому. Закон преобразования координат вектора при замене базиса.
2. Классификация кривых второго порядка на плоскости.

4. Критерии оценивания

Оценка	Баллы	Критерии
отлично	10	Выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины, проявляющему интерес к данной предметной области, продемонстрировавшему умение уверенно и творчески применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.
	9	Выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.
	8	Выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, правильное обоснование принятых решений, с некоторыми недочетами.
хорошо	7	Выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу

		излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но недостаточно грамотно обосновывает полученные результаты.
	6	Выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности.
	5	Выставляется студенту, если он в основном знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач достаточно большое количество неточностей.
удовлетворительно	4	Выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он освоил основные разделы учебной программы, необходимые для дальнейшего обучения, и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации.
	3	Выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, допускающему ошибки в формулировках базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, слабо владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и с трудом применяет полученные знания даже в стандартной ситуации.
неудовлетворительно	2	Выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных принципов и не умеет использовать полученные знания при решении типовых задач.
	1	Выставляется студенту, который не знает основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубейшие ошибки в формулировках базовых понятий дисциплины и вообще не имеет навыков решения типовых практических задач.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

При проведении экзамена обучающемуся предоставляется не менее 40 минут на подготовку. Опрос по билету и ответы на дополнительные вопросы не должен превышать двух астрономических часов. По завершении отведенного на опрос времени, экзаменатор должен выставить обучающемуся оценку в соответствии с вышеприведенными критериями.